

GUJARAT TECHNOLOGICAL UNIVERSITY**Diploma Engineering - SEMESTER-II • EXAMINATION – SUMMER • 2014****Subject Code: 3320003****Date: 12-06-2014****Subject Name: Advanced Mathematics (Group-2)****Time: 10:30 am - 01:00 pm****Total Marks: 70**

1. Attempt ALL questions.
2. Make Suitable assumptions wherever necessary.
3. Figures to the right indicate full marks.
4. Use of SIMPLE CALCULATOR is permissible. (Scientific/Higher Version not allowed)
5. English version is authentic.

- Q.1** Fill in the blanks using appropriate choice from the given options. **14**
- 1 If the mid point of line segment AB is (1,1) , and B (4,3) then the coordinate of A =-----
(a) (2,1) (b) (-2,-1) (c) (-2,1) (d) (2,-1)
 - 2 The slope of st.line perpendicular to the st.line $5x - 7y + 3 = 0$ is -----
(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) $-\frac{7}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$
 - 3 The angle between the st.lines $x + y = 0$ and $x - y = 0$ is -----
(a) 60^0 (b) 30^0 (c) 0^0 (d) 90^0
 - 4 If the radius of the circle $x^2 + y^2 - 4x - 8y + k = 0$ is $\sqrt{19}$ then $k =$ -----
(a) -41 (b) 1 (c) 4 (d) 12
 - 5 If $f(x) = \log(e^x)$ then $f(-1) =$ -----
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) e
 - 6 $\lim_{x \rightarrow 1} [x]_{x-1}^{\frac{1}{x-1}}$
(a) 1 (b) e (c) 0 (d) $\frac{1}{e}$
 - 7 $\frac{d}{dx}(3\sin x - 4\sin^3 x) =$ -----
(a) $-\cos 3x$ (b) $3\cos 3x$ (c) $3\cos x - 4\cos^3 x$ (d) $\sin 3x$
 - 8 If $f(x) = \log \sqrt{x^2 + 1}$ then $f'(0) =$ -----
(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$
 - 9 $\frac{d}{dx}(e^{-\log x}) =$ -----
(a) $\frac{1}{x^2}$ (b) $-\frac{1}{x}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x^2}$
 - 10 If $y = x \log x$ then $\frac{d^2y}{dx^2} =$ -----
(a) $1 + \log x$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\log(e + x)$ (d) $-\frac{1}{x}$
 - 11 $\int e^{x \log a} dx =$ -----
(a) $e^{x \log a}$ (b) a^x (c) $\frac{a^x}{\log a}$ (d) $\log a$
 - 12 $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx =$ -----

- (a) $\frac{e^x}{x}$ (b) $\frac{e^x}{x^2}$ (c) xe^x (d) $(x-1)e^x$

13 The mean value of first eight natural numbers is = -----

- (a) $\frac{9}{2}$ (b) 36 (c) 72 (d) 16

14 The relation between Mean, Median and Mode is -----

- (a) $Z = 2\bar{X} - 3M$ (b) $Z = 3M - 2\bar{X}$ (c) $Z - 2\bar{X} = 3M$ (d) $Z + 3M + 2\bar{X} = 0$

Q.2 (a) Attempt any two

06

1. State the nature of triangle whose vertices are $(a, a), (-a, -a)$ and $(-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$
2. If the point $P(a, b)$ lies on the line $6x - y = 1$ and the point $Q(b, a)$ lies on the line $2x - 5y = 5$. Find the equation of the line passing through the points P and Q .
3. Find the equation of tangent and normal to the circle $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$ at $(2, 3)$.

(b) Attempt any two

08

1. If $f(x) = \frac{x+3}{4x-5}$ and $t = \frac{3+5x}{4x-1}$ then prove that $x = f(t)$
2. Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{x-2}$
3. Evaluate : $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

Q.3 (a) Attempt any two

06

1. Differentiate $f(x) = \cos^2 x$ with respect to x by using the definition of derivative.
2. If $y = \log \left[\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \right]$ then prove that $\sqrt{x^2 + a^2} \frac{dy}{dx} = 2$.
3. If $x = a \cos^4 \theta$ and $y = b \sin^4 \theta$ then prove that $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{by}{ax}} = 0$

(b) Attempt any two

08

1. If $x = at^2$ and $y = 2at$ then prove that $y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$
2. If $\log y = x^x \log x$ then find $\frac{dy}{dx}$.
3. Find the maximum or minimum value of $f(x) = x \log_e x$

Q.4 (a) Attempt any two

06

1. Integrate : $\int x^3 \tan^5(x^4) \sec^2(x^4) dx$
2. Integrate : $\int \frac{e^x(1+x)}{\sin^2(xe^x)} dx$.
3. Integrate : $\int \sin 5x \sin 6x dx$

(b) Attempt any two

08

1. Evaluate : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx$
2. Evaluate : $\int_{-4}^{-3} \frac{x}{7+x} dx$
3. Find the volume of a sphere of radius r by method of integration.

Q.5

(a) Attempt any two

1. For which real values of x , the points $A(0,0)$, $B(0,1)$ and $C(x,1)$ are the vertices of the right angle triangle ABC .
2. If $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ then prove that the st.lin passing through the points $(u,0), (0,v)$ is also passing through the point (f, f) .
3. If $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ then prove that $xf(f(x)) + 1 = 0$

(b) Attempt any two

1. If the mean of the following frequency distribution is 26, then find the missing frequency.

Class	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	Total
Frequency	6	?	17	?	8	60

2. Find the standard deviation for the following data
120, 132, 148, 136, 142, 140, 165, 153.
3. Find the Mean, Median and Mode for following data

Class	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
Frequency	3	8	10	19	25	21
Class	45-50	50-55	55-60			
Frequency	6	5	3			

ગુજરાતી અનુવાદ

સૂચનાઓ:

- 1 દરેક પ્રશ્નોનો ઉત્તર આપો.
- 2 જ્યાં જરૂરી હોય તે યોગ્ય ધારણા કરો.
- 3 જમણી બાજુના આંકડા સંપૂર્ણ ગુણ સૂચવે છે.
- 4 સરળ કેલ્ક્યુલેટર ઉપયોગ પરવાનગી છે. (વૈજ્ઞાનિક / ઉચ્ચ આવૃત્તિની પરવાનગી નથી)
- 5 અંગ્રેજી ભાષાંતર મૂળભૂત આધાર છે.

પ્ર.1

યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

- 1 જો રેખાખંડ AB નું મધ્યબિંદુ $(1,1)$, અને $B(4,3)$ હોય તો A ના યામ =-----
(a) $(2,1)$ (b) $(-2,-1)$ (c) $(-2,1)$ (d) $(2,-1)$
- 2 સુરેખા $5x - 7y + 3 = 0$ ને લંબ સુરેખાનો ઢાળ ----- છે.
(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) $-\frac{7}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$
- 3 સુરેખાઓ $x + y = 0$ અને $x - y = 0$ વચ્ચેનો ખૂણો ----- છે.
(a) 60° (b) 30° (c) 0° (d) 90°

- 4 જો વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4x - 8y + k = 0$ ની ત્રિજ્યા $\sqrt{19}$ હોય તો $k =$ -----
 (a) -41 (b) 1 (c) 4 (d) 12
- 5 જો $f(x) = \log(e^x)$ હોય તો $f(-1) =$ -----
 (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) e
- 6 $\lim_{x \rightarrow 1} [x]_{x-1}^{\frac{1}{x-1}}$
 (a) 1 (b) e (c) 0 (d) $\frac{1}{e}$
- 7 $\frac{d}{dx}(3\sin x - 4\sin^3 x) =$ -----
 (a) $-\cos 3x$ (b) $3\cos 3x$ (c) $3\cos x - 4\cos^3 x$ (d) $\sin 3x$
- 8 જો $f(x) = \log \sqrt{x^2 + 1}$ હોય તો $f'(0) =$ -----
 (a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$
- 9 $\frac{d}{dx}(e^{-\log x}) =$ -----
 (a) $\frac{1}{x^2}$ (b) $-\frac{1}{x}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x^2}$
- 10 જો $y = x \log x$ હોય તો $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ -----
 (a) $1 + \log x$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\log(e+x)$ (d) $-\frac{1}{x}$
- 11 $\int e^{x \log a} dx =$ -----
 (a) $e^{x \log a}$ (b) a^x (c) $\frac{a^x}{\log a}$ (d) $\log a$
- 12 $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx =$ -----
 (a) $\frac{e^x}{x}$ (b) $\frac{e^x}{x^2}$ (c) xe^x (d) $(x-1)e^x$
- 13 પ્રથમ આઠ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો મધ્યક ----- છે.
 (a) $\frac{9}{2}$ (b) 36 (c) 72 (d) 16
- 14 મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું સુત્ર ----- છે.
 (a) $Z = 2\bar{X} - 3M$ (b) $Z = 3M - 2\bar{X}$ (c) $Z - 2\bar{X} = 3M$ (d) $Z + 3M + 2\bar{X} = 0$

પ્ર.2 (અ) ગમે તે બે ગણો

- $(a, a), (-a, -a)$ અને $(-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$ શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનો પ્રકાર નક્કી કરો
- જો બિંદુ $P(a, b)$ એ સુરેખા $6x - y = 1$ ઉપર અને બિંદુ $Q(b, a)$ એ સુરેખા $2x - 5y = 5$ ઉપર આવેલું હોય તો બિંદુઓ P અને Q માંથી પસાર થતી સુરેખાનું સમીકરણ શોધો.
- વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$ ઉપરના બિંદુ $(2, 3)$ આગળ સ્પર્શક તથા અભિલંબના સમીકરણ શોધો.

06

(બ) ગમે તે બે ગણો

08

1. જો $f(x) = \frac{x+3}{4x-5}$ અને $t = \frac{3+5x}{4x-1}$ હોય તો સાબિત કરો કે $x = f(t)$

2. લક્ષ શોધો : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{x-2}$

3. લક્ષ શોધો : $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

પ્ર.3 (અ) ગમે તે બે ગણો

06

1. $f(x) = \cos^2 x$ નું x ની સાપેક્ષ વિકલનની વ્યાખ્યાની મદદથી વિકલન શોધો

2. જો $y = \log \left[\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x} \right]$ હોય તો સાબિત કરો કે $\sqrt{x^2 + a^2} \frac{dy}{dx} = 2$.

3. જો $x = a \cos^4 \theta$ અને $y = b \sin^4 \theta$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{by}{ax}} = 0$

(બ) ગમે તે બે ગણો

08

1. જો $x = at^2$ અને $y = 2at$ હોય તો સાબિત કરો કે $y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$

2. જો $\log y = x^x \log x$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

3. $f(x) = x \log_e x$ ની મહત્તમ અથવા ન્યુનત્તમ કિંમત શોધો

પ્ર.4 (અ) ગમે તે બે ગણો

06

1. સંકલન કરો : $\int x^3 \tan^5(x^4) \sec^2(x^4) dx$

2. સંકલન કરો : $\int \frac{e^x(1+x)}{\sin^2(xe^x)} dx$.

3. સંકલન કરો : $\int \sin 5x \sin 6x dx$

(બ) ગમે તે બે ગણો

08

1. કિંમત શોધો : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx$

2. કિંમત શોધો : $\int_{-4}^{-3} \frac{x}{7+x} dx$

3. r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું ઘનફળ સંકલન ની મદદથી શોધો

Q.5 (a) ગમે તે બે ગણો

06

1. x ની કઈ વાસ્તવિક કિંમતો માટે, બિંદુઓ $A(0,0)$, $B(0,1)$ અને $C(x,1)$ કાટકોણ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓ થશે ?

2. જો $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ હોય તો સાબિત કરો કે બિંદુઓ $(u,0)$, $(0,v)$ માંથી પસાર થતી સુરેખા, બિંદુ (f,f) માંથી પણ પસાર થાય છે.

3. જો $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $xf(f(x))+1=0$

(b) ગમે તે બે ગણો

08

1. જો નીચેની આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યક 26, હોય તો ખુટતી આવૃત્તિ શોધો

વર્ગ	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	Total
આવૃત્તિ	6	?	17	?	8	60

2. નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

120, 132, 148, 136, 142, 140, 165, 153.

3. નીચેની આવૃત્તિ વિતરણ માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ તથા બહુલક શોધો

વર્ગ	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
આવૃત્તિ	3	8	10	19	25	21
વર્ગ	45-50	50-55	55-60			
આવૃત્તિ	6	5	3			