Seat No.: ________ Enrolment No.______________

GUJARAT TECHNOLOGICAL UNIVERSITY

Diploma Engineering – SEMESTER – II • Examination – SUMMER • 2014

Subject Code: 3320002 **Date: 16-06-2014**

Subject Name: Advanced Mathematics (Group-1)

Time: 10:30 am - 01:00 pm **Total Marks: 70**

Instructions:

1. **Attempt ALL questions.**
2. **Make Suitable assumptions wherever necessary.**
3. **Figures to the right indicate full marks.**
4. **Use of SIMPLE CALCULATOR is permissible.** (Scientific/Higher Version not allowed)
5. **English version is authentic.**

Q.1 Fill in the blanks using appropriate choice from the given options. **14**

1 If $z = \cos\theta + i\sin\theta$ then $z + \bar{z} =$---------.

(a) -1 (b) $\cos\theta - i\sin\theta$ (c) $2\cos\theta$ (d) $2i\sin\theta$

2 $\sqrt{-9} =$-----------.

(a) 3 (b) -3 (c) $\pm 3i$ (d) Impossible

3 If $z = -5i$ then $\arg(z) =$----------.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{-\pi}{2}$ (c) 0 (d) π

4 $(2+3i)(3-2i) =$----------.

(a) -12+5i (b) 12-5i (c) 12+5i (d) -12-5i

5 If $f(x) = \cos x$ then $f(\frac{3\pi}{2} - x) =$-------

(a) -sinx (b) sinx (c) cosx (d) -cosx

6 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\theta}{n} =$--------

(a) θ (b) 1 (c) 0 (d) does not exists.

7 If $x = \sec\theta + \tan\theta$ and $y = \sec\theta - \tan\theta$ then $\frac{dy}{dx} =$--------

(a) $\frac{y}{x}$ (b) -1/x^2 (c) $\frac{x}{y}$ (d) 0

8 If $f(x) = \log\sqrt{x^2+1}$ then $f'(0) =$-------

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

9 If $x = at$ and $y = \frac{a}{t}$ then $\frac{dy}{dx} =$---------

(a) $\frac{x}{y}$ (b) $\frac{-y}{x}$ (c) $\frac{y}{x}$ (d) $\frac{-x}{y}$

10 If $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ then $\frac{d}{dx}(y^4) =$ ----

(a) 4y^3 (b) 0 (c) $\frac{y^5}{5}$ (d) 4

11 $\int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^4 x dx =$---------

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

12 $\int \sqrt{(1+\sin 2x)}dx =$ ---------

(a) cos x + sin x (b) cos x – sin x (c) sin x – cosx (d) – sin x – cos x

13 The orders of the differential equation $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + x\sin y = 0$ is____.

(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) 3

14 The integrating factor of the diffential equation $\frac{dy}{dx} = y\tan x + e^x$ is _______

(a) tan x (b) e^x (c) sin x (d) cos x

Q.2 (a) Attempt any two **06**

1. Find the square root of $3-4\sqrt{10}i$
2. If $\frac{(1-i)^2}{3+i} = x+iy$ then find the value of x - y
3. Prove that $\frac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{1+i\sin\theta+\cos\theta} = ie^{-i\theta}\tan\frac{\theta}{2}$

(b) Attempt any two **08**

1. Define an even function and check whether the function $f(x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ is odd or even function.
2. Evaluate : $\lim_{x\to 0} \frac{x \log(1+x)}{1-\cos x}$
3. Evaluate : $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} - 7^{n+1}}{5^n + 7^n}$

Q.3 (a) Attempt any two **06**

1. If $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$ and $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$ then show that its derivatives are equal without using the formulae of derivative of trigonometry functions.
2. If $x^3 + y^3 = x^3 y^3$ then prove that $\frac{dy}{dx} + \frac{y^4}{x^4} = 0$
3. If $\log y = x^x \log x$ then find $\frac{dy}{dx}$

(b) Attempt any two **08**

1. Differentiate f(x) = x cos x with respect to x by using the definition of derivative.
2. If $y = \frac{1}{x^2-5x+6}$ then prove that $\frac{d^2y}{dx} = \frac{2}{(x-3)^3} - \frac{2}{(x-2)^3}$
3. Find the maximum and minimum values of $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Q.4 (a) Attempt any two **06**

1. Integrate. : $\int \frac{3x^2-2x}{x+4}dx$
2. If $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 6x - 1$, y = 5 when x = 2 then represent y as a function of x
3. Integrate : $\int \cos(\log x)dx$

(b) Attempt any two **08**

1. Integrate : $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right)dx$

2. Evaluate : $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$

3. Find the area of the region bounded by the curves $y^2 = 4x$ and $x = 2$

Q.5 **(a)** Attempt any two **06**

1. If $f(x)=\log\left(\frac{x}{x-1}\right)$ then prove that $f(a+1)+f(a)=\log\left[\frac{a+1}{a-1}\right]$

2. Solve : $x\frac{dy}{dx}+\cot y=0$

3. Solve : $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+xSin\left(\frac{y}{x}\right)$

(b) Attempt any two **08**

1. Solve : $Cos^2x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$

2. Solve : $y\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}$

3. Solve : $x\log x\frac{dy}{dx}+y=\log x^2$

****

ગુજરાતી અનુવાદ

Instructions:

1 દરેક પ્રશ્નોનો ઉત્તર આપો.

2 જ્યાં જરૂરી હોય તે યોગ્ય ધારણા કરો.

3 જમણી બાજુના આંકડા સંપૂર્ણ ગુણ સૂચવે છે.

4 સરળ કેલ્ક્યુલેટર ઉપયોગ પરવાનગી છે. (વૈજ્ઞાનિક / ઉચ્ચ આવૃત્તિની પરવાનગી નથી)

5 અંગ્રેજી ભાષાંતર મૂળભુત આધાર છે.

પ્ર.1 યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પુરો. **14**

1 જો $z=\cos\theta+i\sin\theta$ હોય તો $z+\bar{z}=$---------.

(a) -1 (b) $\cos\theta-i\sin\theta$ (c) $2\cos\theta$ (d) $2i\sin\theta$

2 $\sqrt{-9}=$-----------.

(a) 3 (b) -3 (c) $\pm 3i$ (d) અશક્ય છે.

3 જો $z=-5i$ હોય તો $\arg(z)=$----------.

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{-\pi}{2}$ (c) 0 (d) π

4 $(2+3i)(3-2i)=$----------.

(a) -12+5i (b) 12-5i (c) 12+5i (d) -12-5i

5 જો $f(x)=\cos x$ હોય તો $f(\frac{3\pi}{2}-x)=$-------

(a) -sinx (b) sinx (c) cosx (d) -cosx

6 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=$--------

(a) θ (b) 1 (c) 0 (d) મળે નહીં.

7 જો $x=\sec\theta+\tan\theta$ અને $y=\sec\theta-\tan\theta$ હોય તો $\frac{dy}{dx}=$--------

(a) $\frac{y}{x}$ (b) $-1/x^2$ (c) $\frac{x}{y}$ (d) 0

8 જો $f(x)=\log\sqrt{x^2+1}$ હોય તો $f'(0)=$-------

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

9 જો $x=at$ અને $y=\frac{a}{t}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}=$---------

(a) $\frac{x}{y}$ (b) $\frac{-y}{x}$ (c) $\frac{y}{x}$ (d) $\frac{-x}{y}$

10 જો $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ હોય તો $\frac{d}{dx}(y^4)=$----

(a) $4y^3$ (b) 0 (c) $\frac{y^5}{5}$ (d) 4

11 $\int_{-1}^{1}\sin^3 x\cos^4 x dx=$---------

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

12 $\int\sqrt{(1+\sin 2x)}dx=$ ---------

(a) cos x + sin x (b) cos x – sin x (c) sin x – cosx (d) – sin x – cos x

13 વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4+x\sin y=0$ ની કક્ષા____ છે.

(a) 2 (b) 4 (c) 1 (d) 3

14 વિકલ સમીકરણ $\frac{dt}{dx}=y\tan x+e^x$ નો સંકલિતકારક અવયવ _______છે

(a) tan x (b) e^x (c) sin x (d) cos x

પ્ર. 2 **(અ)** ગમે તે બે ગણો **06**

1. $3-4\sqrt{10}i$ નું વર્ગમુળ શોધો

2. જો $\frac{(1-i)^2}{3+i}=x+iy$ હોય તો x – y ની કિંમત શોધો

3. સાબિત કરો $\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+i\sin\theta+\cos\theta}=ie^{-i\theta}\tan\frac{\theta}{2}$

(બ) ગમે તે બે ગણો **08**

1. યુગ્મ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો. અને વિધેય $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ યુગ્મ છે કે અયુગ્મ તે ચકાસો

2. લક્ષ શોધો $\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+x)}{1-\cos x}$

3. લક્ષ શોધો : $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-7^{n+1}}{5^n+7^n}$

પ્ર.3 **(અ)** ગમે તે બે ગણો **06**

1. જો $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$ અને $g(x)=\frac{\cos x}{\sin x-\cos x}$ હોય તો ત્રિકોણમીતીય વિધેયોના વિકલન ના સૂત્રોનો ઉપયોગ કર્યા વગર સાબિત કરો કે તેઓના વિકલન સમાન છે.

2. જો $x^3 + y^3 = x^3 y^3$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} + \frac{y^4}{x^4} = 0$

3. જો $\log y = x^x \log x$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો

(બ) ગમે તે બે ગણો **08**

1. વિકલન ની વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x \cos x$ નું x ની સાપેક્ષ વિકલન શોધો.

2. જો $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2 y}{dx} = \frac{2}{(x-3)^3} - \frac{2}{(x-2)^3}$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ની મહત્તમ તથા ન્યુનત્તમ કિંમતો શોધો.

પ્ર.4 **(અ)** ગમે તે બે ગણો **06**

1. સંકલન કરો : $\int \frac{3x^2 - 2x}{x+4} dx$

2. જો $\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 6x - 1$, $x = 2$ હોય ત્યારે $y = 5$, હોય તો y ને x ના વિધેયના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

3. સંકલન કરો : $\int \cos(\log x) dx$

(બ) ગમે તે બે ગણો **08**

1. સંકલન કરો : $\int e^x \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} \right) dx$

2. કિંમત શોધો : $\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}}$

3. વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x = 2$ દ્વારા ઘેરયેલા બંધ ભાગનું સંકલનની મદદથી ક્ષેત્રફળ શોધો.

પ્ર.5 **(અ)** ગમે તે બે ગણો **06**

1. જો $f(x) = \log\left(\frac{x}{x-1} \right)$ હોય તો સાબિત કરો કે $f(a+1) + f(a) = \log\left[\frac{a+1}{a-1} \right]$

2. ઉકેલો. : $x\frac{dy}{dx} + \cot y = 0$

3. ઉકેલો : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + xSin\left(\frac{y}{x} \right)$

(બ) ગમે તે બે ગણો **08**

1. ઉકેલો : $Cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$

2. ઉકેલો : $y\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$

3. ઉકેલો : $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \log x^2$

****